Referat über

Die Messmaßstäbe

aus

Brian Ellis (1968), Basic Concepts of Measurements, Cambridge University Press

WS 2002/03

DI Bernhard Heiden

F 086 700 B 296

Matr. Nr. 8832418

Inhaltsverzeichnis

1 Die Messmaßstäbe

1.1 Die Menge (Quantity)

„Eine *Menge (Quantity)* wird üblicherweise als eine Art von Eigenschaft wahrgenommen. Sie wird als eine Art Eigenschaft gedacht die Grade erlaubt, und die daher mit Eigenschaften der Eigenschaft alles - oder nichts kontrastiert(z.B. schwanger oder dunkelrot sein)“[1]. Wenn man also physikalische Eigenschaften betrachtet so spricht man bei diesen von einer Menge. Physikalische Eigenschaften wie Druck, Temperatur, Härte sind Mengen, aber auch z.B. Geschwindigkeit. Dabei sind Mengen die gemessen werden zumeist an Objekte gebunden. Die Geschwindigkeit stellt hier eine Ausnahme dar. „Die meisten Mengen haben einen quasi primären ontologischen Status“[1].

Feststellen kann man, dass es sich bei der Menge Geschwindigkeit um eine aus Grundmengen (hier Grundgrößen der Physik) zusammengesetzte handelt (Einheit: Weg/Zeit) während sich bei der Masse etc. der ontologische primäre Status feststellen lässt. Ob die Welt größtenteils aus den einen oder anderen Größen besteht ist sicherlich a priori nicht beantwortbar, da wir ja einerseits erst durch unsere subjektive Einteilung Mengen bestimmen. Es ist z.B. eine Menge vorbeifahrender Autos einer bestimmten Farbe beobachtbar, solche Beispiele wären beliebig konstruierbar. Andererseits sind klarerweise bei n primären Mengen aus physikalischen Grundgrößen n! (Permutation von n) Mengen von zwei zusammengesetzten Grundgrößen denkbar. Man kann nun sogar sagen: Die meisten Mengen der physikalischen Grundgrößen haben keinen quasi primären ontologischen Status.

Dabei bestehen *Mengen vor der Wahrnehmung*, oder vor der Zuordnung zu Größen (Magnitude), da es für sie operationale Kriterien für die Existenz und Einheit der Größen gibt, die bei Ellis nachfolgend angegeben werden.

1.2 Der Maßstab (Scale)

[1] E. S.24

„Nicht alle Maßstäbe sind zum Messen von Mengen“[2]. Zunächst werden von E. notwendige und hinreichende Bedingungen gegeben, dass es sich überhaupt um einen Messmaßstab handelt, dann wird gezeigt wie man feststellt, das es sich um identische Maßstäbe handelt. Des weiteren werden von E. die Bedingungen unter denen ein gegebener Maßstab als einer für die Messung einer gegebenen Menge klassifiziert werden kann angegeben.

1.2.1 Allgemein

S.S. Stevens sagt: „Messen ist das Zuordnen von Zahlen zu Objekten oder Ereignissen gemäß einer Regel – irgendeiner Regel“[2]. Das kritisiert nun E., da man wenn man irgendeine Regel ausführt, schließlich nicht unbedingt eine sinnvolle Messung ausführt, in dem Sinne dass wir eine Menge messen.

Es muss gemäß E. die Definition erweitert werden, sodass die Regel imstande sein muss einen Maßstab zu definieren. „*Damit eine Maßstab gegeben ist muss*[3] *gelten*:

a.) Wir haben eine Regel für numerische Zuordnungen
b.) Diese Regel ist determinierend in dem Sinne dass, bei ausreichender Sorgfalt dieselben Zahlen oder Bereiche von Zahlen immer denselben Zahlen denselben Dingen unter denselben Bedingungen zugeordnet werden.
c.) Die Regel ist nicht-degenerativ in dem Sinne, dass sie die Möglichkeit erlaubt verschiedene Zahlen (oder Bereiche von Zahlen) zu verschiedenen Dingen, oder zu demselben Ding unter verschiedenen Bedingungen zu erlauben.

Die Bedingung b.) und c.) sind notwendig um zu gewährleisten, dass die Regel informativ ist. Die dritte Bedingung soll Regeln der Art „Ordne die Zahl 2 allen Dingen zu“ ausschließen“. [4]

Daher führt E. folgende *Definition des Messen* ein:

a.) „Messung ist die Zuordnung von Zahlen zu Dingen gemäss irgendeiner determinierenden, nicht degenerierten Regel

[2] E. S.39
[3] Existenzrelation eines Maßstabes
[4] E. S.41

b.) Wir haben einen Maßstab der Messung genau dann wenn wir eine solche Regel haben“

Es stellt sich für E. nun die Frage wie man die Identität von Messskalen feststellt. Man tut dies nicht indem die Prozeduren gleich sind, sondern indem jedes Mal gleiche Messergebnisse den gleichen Dingen zugeordnet werden. Er formuliert somit den als ergänzenden Punkt der Definition des Messens:

c.) „Zwei Messmethoden sind Messmethoden für das Messen auf demselben Maßstab genau dann wenn, wo immer man glaubt, dass sie anwendbar sind, dass sie immer zu denselben numerischen Zuordnungen führen die man für dieselben Dinge unter denselben Bedingungen gemacht hat.“[5]

Damit sieht E. schließlich die Parallele zu Menge. Wie die Ordnung der Menge und nicht die Ordnungsrelationen wichtig für die Einheit einer Menge ist, sind für den Maßstab die Zahlenzuordnungen und nicht der Weg wie man dazu gekommen ist wichtig für das Feststellen der Einheit eines Maßstabes. In Abbildung 1 ist mit den gestrichelten Pfeilen die Messmethode a und mit den durchgezogenen Pfeilen

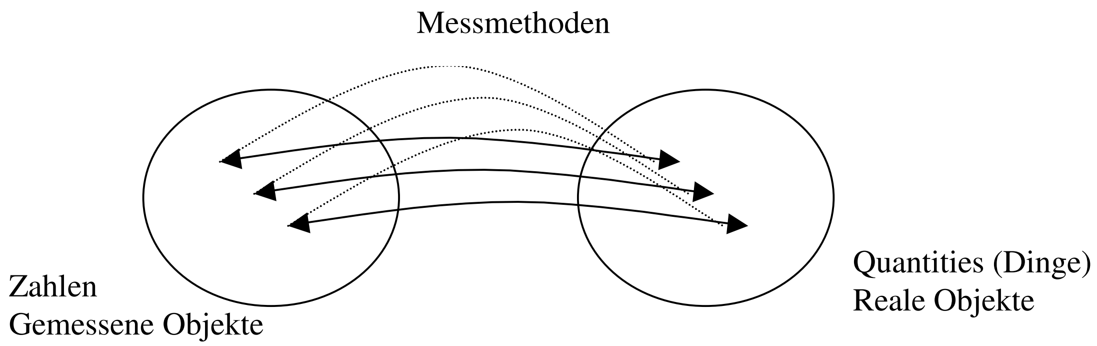

Abbildung 1 Messmethoden: a gestrichelte Pfeile b durchgezogene Pfeile ergeben denselben Maßstab (Zahlen im rechten Kreis)

die Messmethode b dargestellt. In beiden Fällen führen dieselben Mengen zu denselben Zahlen unabhängig von der Meßmethode. Daher ist der Maßstab derselbe.

1.2.2 Maßstäbe für das Messen von Mengen

Nicht alle Maßstäbe sind so beschaffen, dass sie Mengen messen. „So sind zum Beispiel nominale Maßstäbe bloß solche für das Messen von Identität und

[5] E. S.42

Unterschied. Im anderen Extrem gibt es verschiedene Arten von mehrdimensionalen Maßstäben für so komplexe Entitäten wie z.B. Farbe.“[6]

In diesem Abschnitt wird der eingeschränkte Bereich dazwischen, der *Maßstab von Mengen* beschrieben. Gemäß dem allgemeinen Fall des Messens wird eine Menge q - von geordneten Werten - die auf eine Beobachtung mit dem Maßstab S abbildet betrachtet (Abbildung 2).

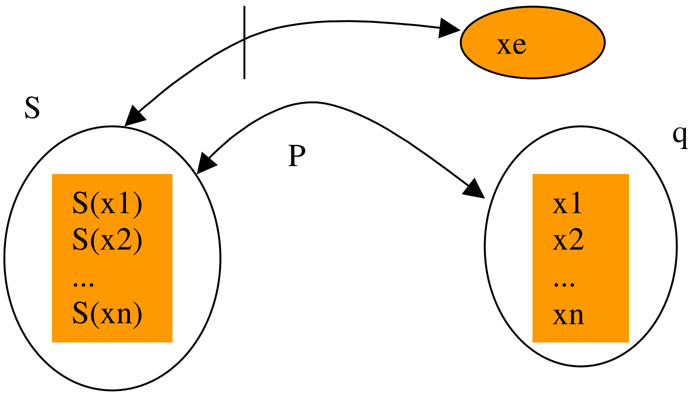

Abbildung 2 **(i) Es gibt eine Messmethode (procedure) P für das Messen auf S sodass jedem xi auf q ein S(xi) zugeordnet ist; S ist der Maßstab (Scale), q sind die realen Objekte der Menge (quantity) und P ist die Messung; (ii) Es gibt kein Objekt auf S das messbar ist und nicht zu q gehört (z.B.: xe $\not\subset$ q also ist darf es auch nicht von S messbar sein) (iii) S(xi) wird über P xi zugeordnet; i=1..n, Die Ordnung von q wird auf S übertragen.**

Der Begriff des Maßstabes wird von E. nun folgendermaßen definiert:

d.) „Wir haben einen Maßstab (scale) S für die Messung von einer bestimmten Menge (quantity) q genau dann wenn:

(i) Es eine eine Methode (procedure) P für das Messen auf S gibt, sodass jedes Objekt x das in der Reihenfolge von q auftritt von P messbar ist [vgl. (Abbildung 2)]

(ii) Es gibt kein Objekt auf S das messbar ist und nicht zu q gehört

(iii) Wenn die Objekte messbar auf S in der Reihenfolge ihrer numerischen Zuordnungen angeordnet werden, werden sie dabei gleichzeitig in der Reihenfolge von q angeordnet.[7]“

[6] E. S.42
[7] E. S.43

Die Punkt (i) stellt sicher, dass über den gesamten Messbereich gemessen werden kann, obschon nur wenige Messgrößen denkbar sind, die über den gesamten Skalenraum gemessen werden können, und dann mit einer Methode. So kann man z.B. die Temperatur nur in einem begrenzten Bereich mit dem Thermometer messen und nicht von 0 - unendlich. Der Punkt (II) schließt aus, dass eine andere Messgröße gemessen wird. Punkt (III) schließlich wird von E. willkürlich angenommen, da eine einheitliche Art der Zuordnung sinnvoll ist. Wenn die Ordnung der Werte von q auf die Ordnung der Werte von S übergeht, dann bedeutet die lineare Übertragung von realen zu gemessenen Werte zudem eine einfache. Anstatt dessen könnte man auch sagen „es ist ein Maßstab der Messung der Gleichheit oder Ungleichheit in q“[7].

Es gibt nun mehrere Einwände gegen Punkt d.), es stellt sich die Frage ob die Bedingungen (i)-(iii) hinreichend sind. So z.B. dass es nichtlineare Maßstäbe gibt. Auch hier ergibt sich eine eindeutige Zuordnung (Punkt I), aber es kommt zu einer Verzerrung des Maßstabes.[8]

Der Psychologist wird laut E. wahrscheinlich die Argumente (i-iii) verwerfen, da er unterschiedliche Längen sieht. Die psychologische Länge und die physikalische etc.

Zwei Probleme treten beim Psychologisten bei den Mengen auf:

(i) die Gleichheit der Ordnung bedeutet möglicherweise nicht eine Gleichheit der Objekte
(ii) wir brauchen Kriterien für die Existenz und Identität von Objekten die nicht durch eine lineare Ordnung dargestellt werden können

ad (i): Das Problem der Redeweise ist, dass das Objekt mit dem gemessenen Objekt gleichgesetzt wird. Mann müsste daher von verschiedenen Skalen sprechen: Also die Skala der physikalischen Länge, die Skala der psychologischen Länge etc., damit wird vom selben Objekt in q gesprochen.

[8] Es stellt sich die Frage ob man hier noch von kontinuierlichen Skalen sprechen kann, (i) wenn nicht mehr jeder Zahl auf der Messskala ein reales Objekt entspricht und wenn (ii) die realen Objekte selbst keine kontinuierlichen Werten bilden können (Es gibt z.B. nur ganze Objekte!)

ad (ii): Wenn die Ordnung der Messskalen (z.B. psychologische und physikalische Lange) verschieden sind, dann muss man ebenso zwischen den Mengen unterscheiden. Es kommt dann zu einer anderen Zuordnung (andere Messmethode z.B. in Abbildung 1 gestrichelte anstatt durchgezogener Linie).

E. schlägt dann vor den Terminus psychologische Länge zu streichen, weil ohnehin von einer *identischen Menge* gesprochen wird[9]. Auch hat des weiteren die physikalische Messmethode die Vorzüge der Genauigkeit und Reproduzierbarkeit.

1.2.3 Maßstäbe und Fluent

Das Konzept des Maßstabes kann mit dem des Fluents bei Menger weitgehend verglichen werden.[9] Dabei wird das Fluent als das physikalische Analogon einer mathematischen Funktion bezeichnet. Dabei besteht „der wesentliche Unterschied zwischen einem Fluent und einer Funktion darin, dass die Elemente aus denen die Argumente des Fluents bestehen aus einer Art nicht-mathematischem Objekt bestehen (physikalische Objekte oder Ereignisse).“[10]

So kann man schließlich sagen, dass man eine Funktion als Wertepaar (x, f(x)) [11]auffassen kann, genauso kann man eine Skala als Wertepaar (A,S(A))[12] (vgl. Abbildung 2 wobei A xi bedeutet; xi=1..n)) auffassen.

Es stellt sich nun die Frage welche Auswirkungen dieser Unterschiede der mathematischen und der physikalischen Objekte hat.

Zum einen ist die Zugehörigkeit der physikalischen Objekte variabel. „Tritt ein neues Objekt zu S hinzu, so gilt der originale Maßstab von S nicht mehr. Mit anderen Worten: Wenn S ein Maßstab für das Messen auf q ist, und ein neues Objekt B das q angehört geschaffen wird, dann ist es logisch unmöglich B in Hinblick auf q auf S zu messen.“[10] Im Gegensatz dazu sind mathematische Objekte zeitlos, und es können

[9] E. S.45
[10] E. S.46
[11] der Wert x wird einer Funktion f(x) zugeordnet
[12] der Wert A wird einer Skala S(A) zugeordnet

nicht plötzlich neue Werte auftauchen. Dieser Unterschied wirkt sich also insofern fatal aus, als sich mit neuen Objekten die Skalen zwangsläufig ändern.

1.2.4 Allgemeines betreffend Maßstäbe und Mengen

E. untersucht nun einige Probleme bei der Definition von Mengen.

Die fundamentale Frage was ist die wahre Ordnung einer gegebenen Menge kann nicht wirklich beantwortet werden. Man kann sich eine beliebige Zuordnung vorstellen von Mengen zu Maßstäben. So ist die der Maßstab der psychophysischen Temperatur) anders als der Maßstab der physikalischen Temperatur der „wahren" Temperatur (Menge) zugeordnet. Dennoch handelt es sich um dieselbe Temperatur. Es ist nicht zu entscheiden welches die wahre Ordnung darstellt. Daher kann man zwar nicht sagen, welches die wahre Ordnung ist, daher meint E. sollte man am besten gar nicht von Quantitäten sprechen.[13] Der Vorteil von linearen Ordnungsmethoden (größer, kleiner) ist, dass sie am universellsten sind, und die meisten Unterteilungen erlauben.

Ein Problem betrifft den Begriff der Menge. „*Zwei Methoden sind Methoden für das Ordnen von Dingen im Hinblick auf dieselbe Menge genau dann, wenn sie immer dieselbe Ordnung der gleichen Objekte unter denselben Umständen haben*"[14].
Das erste Problem ist dass sich dieselben Umstände niemals erreichen lassen, dass es also immer Unterschiede bei den Messungen gibt, also sich dieselben Umstände nicht mehr wiederholden. Es geht darum die relevanten bzw. irrelevanten Unterschiede zu finden um entscheiden zu können ob die Umstände gleich sind.
Dieselbe Ordnung zu haben darf ebenso nicht so streng gehandhabt werden. So bedeutet es z.B., dass man dieselbe Menge misst obschon man einen anderen Bereich (z.B. verfeinerten) verwendet.

Das Argument muss also relativiert werden: „Wir können nur sagen, dass wenn man übereinkommt dass die Methoden dieselben sind (zum Zwecke der Messung) dann müssen die numerischen Methoden i.a. dieselben sein innerhalb der Grenzen des Fehlers, der für diese Methode geeignet ist". In der Messtechnik gibt es seit 1993

[13] E. S.50 f
[14] E. S.48

eine ISO Norm zur Behandlung dieser Messfehler (Kirkup), die neben den SI-Einheiten einen weiteren Messpfeiler allgemeiner Messungen bilden. So lässt sich der Gesamtmessfehler aus den Relationen der Messfehler der einzelnen Messgrößen berechnen.

Angesichts der Messungenauigkeit stellt sich die Frage ob es denn überhaupt eine „wahre" Menge gibt. Wären dann auf einem perfekten Maßstab die Mengen proportional zu den Werten?

Auf diese Frage ob es eine „wahre" Menge gibt, geht E. im nächsten Kapitel „Die Einteilung der Messmaßstäbe ein.

1.3 Die Einteilung der Messmaßstäbe

1.3.1 Allgemein

Ein System der Einteilung gibt uns einen Überblick über die Arten der Phänomene, und z.T. über allgemeine Aussagen. Für die Einteilung der Messsysteme gibt es zwei Hauptsysteme.

1.) Das Klassische System nach Campbell, das auf der Analysis unserer Messmethoden beruht – Unsere Maßstäbe werden nach diesen eingeteilt
2.) Das System nach Stevens, das unsere Maßstäbe nach mathematischen Gesichtspunkten einteilt.
3.) Das System von H. Coombs – es beruht auf einer Einteilung der Skalen nach Art der *Anwendung der Arithmetik,* die sie repräsentieren[15]

Wobei E. des weiteren von Stevens und Coombs von einem System spricht, da sich diese stark ähneln.

Die Methode nach Stevens ist für den praktischen Wissenschaftler von Vorteil, wobei von einem Wissen über die Art des Maßstabes auf die Art der relevanten

[15] E. S.52

Statistik für die Messung geschlossen werden kann, während die Methode von Campbell tiefere Einsichten in die Bedingungen für die Möglichkeit der Messung gibt.

1.3.2 Das Campbellsche System

Der wichtigste Unterschied ist nach Campbell der Unterschied zwischen *fundamentaler* und *abgeleiteterer Messung*. Die fundamentale Messung hängt von keiner früheren Messung ab, während die abgeleitete Messung von einer abhängt. E. erweitert den Begriff von Campbell durch die Verfeinerung:“ Wir müssen sagen, dass eine Menge durch eine abgeleitete [indirekte*] Messung gemessen wird, wenn das die Messung einer oder mehrerer anderer Mengen beinhaltet“[16]. Da durch die Definition von Campbell auch der Fall inkludiert wäre, dass man eine Messung macht, und mittels einer mathematischen Relation eine andere Größe berechnet. Das wäre im Campbellschen Sinne abgeleitet, aber im Sinne von E. fundamental. Dennoch ist es auch im Sinne von E. abgeleitet, da Campbell später erklärt, dass eine abgeleitete Messung „eine Messung mit Hilfe von Konstanten in numerischen Gesetzen ist“[17]. Dieser Terminus wir von E. schließlich als *abgeleitete Messung* benannt, während die Temperaturmessung als *assoziative Messung* bezeichnet wird. Beide Arten der Messmethode ordnen sich der indirekten Messung [18]unter (S. Abbildung 3).

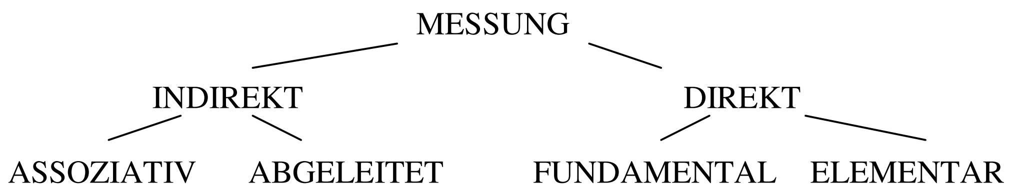

Abbildung 3 Einteilung der Messskalen nach Campbell und Ellis abhängig von den Messmethoden

Campbell definiert zunächst *fundamentale Messung* als Messung die nicht von einer vorhergehenden Messung abhängt. Er stellt fest, dass unsere Maßstäbe von Länge

[16] E. S.53 Definition der abgeleiteten Messung nach Campbell; * so würde analog die Definition der indirekten Messung lauten.
[17] E. S.54
[18] jede Messung einer gegebenen Menge die die Messung einer oder mehrerer anderer Mengen beinhaltet.

Masse etc. durch logisch äquivalente Methoden aufgebaut werden können (sogenannte „Additions“ Operationen)[19] Zu einem Objekt der Menge Masse wird ein zweites dazugezählt ein drittes usf. dadurch erhält man eine fundamentale Messung. Aber nicht alle Messungen können fundamental dargestellt werden, so zum Beispiel die Mohs'sche Härteskala, die weder eine indirekte, noch fundamentale Messung ist. Daher ordnet ihr E. den allgemeinen Term der direkten Messung zu[19]. Dieser spezielle Fall repräsentiert die elementare Messung, da jede Messung auf diese Art und Weise so durchgeführt werden kann, dass garantiert ist, dass eine Menge existiert, aber wenn eine Menge existiert, existieren auch ordnende Beziehungen und es ist zumindest möglich, sie linear anzuordnen.

Die Messmethoden der elementaren, assoziativen, abgeleiteten und fundamentalen Messung stellen eine Art Hierarchie dar, derart, dass die Bedingungen ihrer Anwendungen immer zwingender werden und ihr Anwendungsbereich immer eingeschränkter wird. So ist die elementare Messung auf jede Art von Messung anwendbar, während die fundamentale Messung von besonderer Bedeutung in der Wissenschaft ist.

2 Zusammenfassung

Es gibt in der Realität Objekte, die zu Mengen zusammengefasst werden können. Diese können wir nicht bestimmen, wir können auf sie nur mit operationalen Kriterien schließen. Sie können größer oder kleiner sein relational zueinander, dabei bilden sie eine lineare Ordnung, die dann auf einen Maßstab übertragen werden kann. Dabei kann ein Maßstab am besten mit einem Fluent beschrieben werden, dass das physikalische Analogon einer mathematischen Funktion ist. Dieser Maßstab kann mit verschiedenen Meßmethoden gefunden werden, wobei es sich dann immer um dieselbe Menge handelt. Meßmethoden übertragen Mengen auf Skalen bijektiv. Außerdem wird die Ordnung der Menge per Definition auf den Maßstab übertragen (größer kleiner Relationen). Die Striktheit der Zuordnung von Objekten der Menge zu Zahlen auf dem Maßstab kann nicht eingehalten werden, da immer Messungenauigkeiten vorhanden sind, schließlich gar nicht von den

[19] E. S. 55

zugrundeliegenden Objekten im Sinne einer platonischen Idee als „wahrer Menge“ gesprochen werden kann. Sinnvollerweise soll von den Skalen einer Menge gesprochen werden. So können verschieden Skalen, dennoch dieselbe Menge bezeichnen z.B. Temperatur psychophysisch und physikalisch.

Bezüglich der Einteilung der Messmaßstäbe in Systeme gibt es wesentlich zwei, die nach Campbell und die nach Stevens. Die Campbellsche klassifiziert die *Messmethoden*, die Stevensche klassifiziert nach mathematischen Kriterien.

Zusammen mit den Modifikationen von E. kann man die Messskalen in die direkten und indirekten Messmethoden einteilen (Abbildung 3), wobei die indirekte Messmethode wieder in abgeleitete und assoziative und die direkte in fundamentale und elementare eingeteilt wird. Dabei stellt die fundamentale Messung den eingeschränktesten und die elementare Messung den allgemeinsten Fall dar.

Abkürzungen

S.	Seite
E.	Brian Ellis

Begriffe

Grösse	Magnitude
Maßstab	Scale
Menge	Quantity
Messen	Measurement
(Mess)methode	Procedure
Fließendes	fluent

Literatur

Ellis, B. (1968) Basic Concepts of measurements, Cambridge University Press, first published 1966; 220S.

Kirkup, L. (2002) "A guide to GUM", European Journal of Physics, **23**:pp 483-487